

Primul baraj de selecție pentru OBMJ

Constanța, 5 aprilie 2012

Soluții

Problema 1. Fie numerele reale pozitive p și q cu proprietatea că $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Arătați că:

$$\text{a) } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{q(q+1)} < \frac{1}{2}, \quad \text{b) } \frac{1}{p(p-1)} + \frac{1}{q(q-1)} \geq 1.$$

Soluție. Relația din enunț este echivalentă cu $pq = p + q \stackrel{\text{not}}{=} s$. Deoarece $(p+q)^2 \geq 4pq$, rezultă $s \geq 4$.

$$\text{a) Avem } \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{q(q+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{p+q+2}{(p+1)(q+1)} = 1 - \frac{s+2}{2s+1} = \frac{s-1}{2s+1} < \frac{1}{2}.$$

Inegalitatea din stânga se scrie $\frac{s-1}{2s+1} \geq \frac{1}{3}$, care se reduce la $s \geq 4$.

$$\text{b) } \frac{1}{p(p-1)} + \frac{1}{q(q-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q} = \frac{p+q-2}{(p-1)(q-1)} - 1 = s - 3 \geq 1.$$

Problema 2. Fie x și y două numere raționale și n un număr natural impar. Știind că $x^n - 2x = y^n - 2y$, arătați că $x = y$.

Soluție. Cazul $n = 1$ este trivial.

Presupunem în continuare că $n \geq 3$ și $x \neq y$. Din relația dată se obține că

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} = 2. \quad (*)$$

Fie $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$, cu $(a, b, c) = 1$. Din (*) rezultă că

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} = 2c^{n-1}. \quad (**)$$

Membrul stâng al egalității (**) este o sumă cu un număr impar de termeni, egală cu un număr par, de unde rezultă că a și b sunt numere pare. De aici obținem că 2^{n-1} divide $2c^{n-1}$, de unde, cum $n \geq 3$, rezultă că $2 \mid c$. Ca urmare, 2 este divizor comun al numerelor a , b , c , contradicție.

Problema 3. În triunghiul ABC se consideră punctele $D \in (BC)$ și $M \in (AD)$. Notăm intersecția dreptelor BM și AC cu E , intersecția dreptelor CM și AB cu F și intersecția dreptelor EF și AD cu N . Demonstrați că $\frac{AN}{DN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{DM}$.

Soluție. Fie $\frac{MA}{MD} = k$ și $\frac{DB}{DC} = p$, unde $k, p > 0$.

Aplicând teorema lui Menelaos în triunghiul ABM cu transversala $F - N - E$ rezultă

$$\frac{NA}{NM} = \frac{EB}{EM} \cdot \frac{FA}{FB} \quad (1)$$

Aplicând teorema lui Menelaos în triunghiul ABD cu transversala $C - M - F$ rezultă $\frac{FA}{FB} = \frac{k}{p+1}$.

Folosind teorema lui van Aubel, deducem că $\frac{MB}{ME} = \frac{DB}{DC} + \frac{FB}{FA} = \frac{pk + p + 1}{k}$, de unde obținem că

$$\frac{EB}{EM} = \frac{(p+1)(k+1)}{k}.$$

Înlocuind în relația (1) se obține că $\frac{NA}{NM} = k + 1$, de unde $\frac{NA}{AM} = \frac{k+1}{k+2}$, $\frac{NA}{AD} = \frac{k}{k+2}$ și $\frac{NA}{ND} = \frac{k}{2}$.

Problema 4. 100 de greutăți cu mase diferite, exprimate prin numere naturale de la 1 la 100, se așază pe talerele unei balanțe, astfel încât balanța se află în echilibru. Arătați că se pot îndepărta câte două greutăți de pe fiecare taler astfel încât balanța să rămână în echilibru.

Soluție. Notăm cu A , respectiv B mulțimea numerelor naturale ce reprezintă masele greutăților așezate pe cele două talere. Presupunem că $1 \in A$.

Dacă există $a, b \in \{1, 2, \dots, 100\}$ astfel încât $a \in A$, $a + 1 \in B$, $b \in B$, $b + 1 \in A$, și $b - a \geq 2$, problema este rezolvată.

$$\begin{array}{c|cccccccc} A & ? & ? & a & & ? & ? & ? & & b+1 & ? & ? \\ \hline B & ? & ? & & a+1 & ? & ? & ? & b & & ? & ? \end{array}$$

În caz contrar, distribuția elementelor din A și din B respectă una din următoarele configurații:

$$\begin{array}{c|cccccccc} A & 1 & 2 & \dots & \dots & k & & & & k+2 & \dots & \dots & 100 \\ \hline B & & & & & & k+1 & & & & & & \end{array}$$

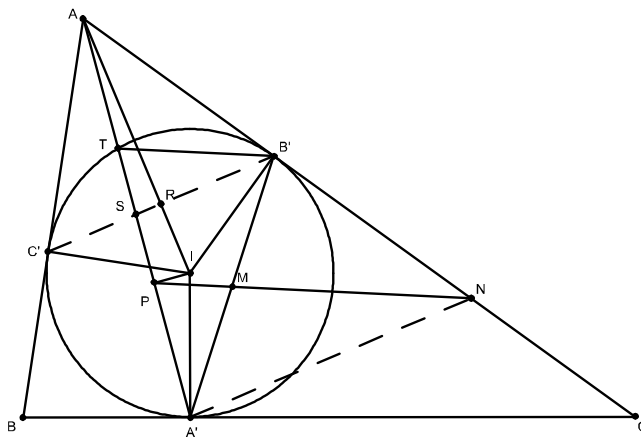
$$\begin{array}{c|cccccccc} A & 1 & 2 & \dots & \dots & k & & & & & & & \\ \hline B & & & & & & k+1 & k+2 & \dots & \dots & & & 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc} A & 1 & 2 & \dots & \dots & k & & & k+2 & & & & \\ \hline B & & & & & & k+1 & & k+3 & \dots & \dots & & 100 \end{array}$$

Pentru fiecare caz, rămâne să verificăm dacă există $k \in \{1, 2, \dots, 100\}$ astfel încât suma elementelor lui A să fie egală cu suma elementelor lui B (condiția de echilibru).

Pentru primul caz, este evident că acest lucru nu se întâmplă. În al doilea și respectiv al treilea caz se obțin ecuațiile $k(k+1) = 5050$, respectiv $(k+1)(k+2) = 5048$, care nu au soluții numere naturale.

Problema 5. Fie ABC un triunghi și A' , B' , C' punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC , CA , respectiv AB . Notăm cu I centrul cercului înscris și fie P proiecția lui I pe dreapta AA' . Fie M mijlocul segmentului $[A'B']$ și N intersecția dreptelor MP și AC . Arătați că $A'N$ este paralelă cu $B'C'$.



Soluție. Fie $\{R\} = AI \cap BC$ și T a doua intersecție a cercului înscris cu dreapta AA' .

Observăm că MP este linia mijlocie în triunghiul $A'TB'$, deci $PN \parallel TB'$.

Este suficient să demonstrăm că $\Delta STB' \sim \Delta A'PN$, adică $\frac{TB'}{PN} = \frac{TS}{PA'}$. Cum $\frac{TB'}{PN} = \frac{AT}{AP}$, cerința se scrie $\frac{TS}{PA'} = \frac{AT}{AP}$, ceea ce este echivalent cu $\frac{AS}{AA'} = \frac{AT}{AP}$.

Din $\Delta ASR \sim \Delta API$ rezultă că $AS \cdot AP = AR \cdot AI$, iar din $\Delta ATB' \sim \Delta AA'B'$ avem $AA' \cdot AT = B'A'^2$. Cum $B'A'^2 = AR \cdot AI$ (din teorema catetei), rezultă cerința.