Primul baraj de selecţie pentru OBMJ
Constanţa, 5 aprilie 2012

Problema 1. Fie numerele reale pozitive p şi q cu proprietatea că $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Arătaţi că:

a) $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{q(q+1)}<\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{p(p-1)}+\frac{1}{q(q-1)} \geq 1$.

Problema 2. Fie x şi y două numere raţionale şi n un număr natural impar. Ştiind că $x^n-2x=y^n-2y$, arătaţi că $x=y$.

Problema 3. În triunghiul ABC se consideră punctele $D \in (BC)$ şi $M \in (AD)$. Notăm intersecţia dreptelor BM şi AC cu E, intersecţia dreptelor CM şi AB cu F şi intersecţia dreptelor EF şi AD cu N. Demonstraţi că $\frac{AN}{DN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AM}{DM}$.

Problema 4. 100 de greutăţi cu mase diferite, exprimate prin numere naturale de la 1 la 100, se aşază pe talerele unei balanţe, astfel încât balanţa se află în echilibru. Arătaţi că se pot îndepărta câte două greutăţi de pe fiecare taler astfel încât balanţa să rămână în echilibru.

Problema 5. Fie ABC un triunghi şi A', B' C' punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB. Notăm cu I centrul cercului înscris şi fie P proiecţia lui I pe dreapta AA'. Fie M mijlocul segmentului $[A'B']$ şi N intersecţia dreptelor MP şi AC. Arătaţi că $A'N$ este paralelă cu $B'C'$.