Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a IX-a

Problema 1. Înălţimea $[BH]$ dusă pe ipotenuza triunghiului ABC intersectează bisectoarele $[AD]$ şi $[CE]$ în punctele Q, respectiv P. Demonstraţi că dreapta care trece prin mijloacele segmentelor $[QD]$ şi $[PE]$ este paralelă cu dreapta AC.

Problema 2. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea: pentru orice interval deschis şi mărginit I, mulţimea $f(I)$ este un interval deschis, de aceeaşi lungime cu I.

Problema 3. Demonstraţi că, dacă $n \geq 2$ este un număr natural şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale pozitive, atunci

$$4\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}^3 - x_n^3}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n^3 - x_1^3}{x_n + x_1}\right) \leq$$
$$\leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2.$$

Problema 4. Pe o masă sunt $k \geq 2$ grămezi având $n_1, n_2, \ldots,$ respectiv n_k creioane. O *mutare* constă în alegerea a două grămezi având a, respectiv b creioane, $a \geq b$ şi transferarea din prima grămadă în cea de-a doua a b creioane.

Determinaţi condiţia necesară şi suficientă pentru $n_1, n_2, \ldots, n_k$, astfel încât să existe o succesiune de mutări prin care toate creioanele sunt transferate în aceeaşi grămadă.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.