

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală, Constanța, 3 aprilie 2012

CLASA a VIII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Determinați numerele reale a, b, c, d astfel încât
 $ab + c + d = 3$, $bc + d + a = 5$, $cd + a + b = 2$ și $da + b + c = 6$.

Soluție. Notăm relațiile date:

$$ab + c + d = 3 \quad (1) \qquad bc + d + a = 5 \quad (2)$$

$$cd + a + b = 2 \quad (3) \qquad da + b + c = 6 \quad (4)$$

Adunând relațiile (1) și (2) și scăzând relațiile (3) și (4) obținem
 $(b - d)(a + c - 2) = 0$.

Pentru $b = d$, din (1) și (4) se obține o contradicție, deci $a + c = 2$.

..... **3 puncte**

Adunând relațiile (3) și (4) se obține $(d + 1)(a + c) + 2b = 8$, de unde
 $b + d = 3$ **2 puncte**

Adunând relațiile (2) și (3) se obține $(c + 1)(b + d) + 2a = 7$, de unde
 $3c + 2a = 4$.

Rezultă $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ și $d = 3$ **2 puncte**

Problema 2. În planul xOy se consideră mulțimea de puncte

$$X = \{P(a, b) \mid (a, b) \in \{1, 2, \dots, 10\} \times \{1, 2, \dots, 10\}\}.$$

Determinați numărul de drepte diferite care se obțin unind câte două
dintre punctele mulțimii X , astfel încât oricare două drepte nu sunt paralele.

Soluție Fie \mathcal{D} , respectiv \mathcal{D}' , mulțimea dreptelor, oricare două neparalele,
care formează cu semidreapta pozitivă Ox unghiuri ascuțite, respectiv obtuze.
Dacă o dreaptă $d \in \mathcal{D}$ conține punctele $P_1, P_2 \in X$, atunci P_1P_2 este
diagonală în dreptunghiul $P_1Q_1P_2Q_2$, unde $Q_1, Q_2 \in X$, deci fiecărei drepte
 $d \in \mathcal{D}$ îi corespunde o dreaptă $d' \in \mathcal{D}'$ și reciproc. **2 puncte**

Tangentele unghiurilor formate de dreptele $d \in \mathcal{D}$ cu Ox sunt numere
distincte de forma $\frac{y}{x}$, unde $x, y \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $(x, y) = 1$ **2 puncte**

Pentru $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$, sunt 9 fracții ireductibile de forma $\frac{1}{x}$, 5 fracții
ireductibile de forma $\frac{2}{x}$, 6 de forma $\frac{3}{x}$, 5 de forma $\frac{4}{x}$, 8 de forma $\frac{5}{x}$, 3 de
forma $\frac{6}{x}$, 8 de forma $\frac{7}{x}$, 5 de forma $\frac{8}{x}$ și 6 fracții ireductibile de forma $\frac{9}{x}$.

..... **2 puncte**

Ca urmare, mulțimile \mathcal{D} și \mathcal{D}' au fiecare câte 55 de elemente, iar numărul dreptelor căutate este 112 (se adaugă o dreaptă paralelă cu Ox și una paralelă cu Oy). **1 punct**

Problema 3. Se consideră triunghiurile ascuțitunghice ACD și BCD , situate în plane diferite. Fie G și H centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului BCD , iar G' și H' centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului ACD . Știind că dreapta HH' este perpendiculară pe planul (ACD) , arătați că dreapta GG' este perpendiculară pe planul (BCD) .

Soluție Relația $HH' \perp (ACD)$ implică $HH' \perp CD$ și, cum $CD \perp BH$, obținem $CD \perp (BHH')$ **1 punct**

Deoarece $AH' \perp CD$ rezultă $AH' \subset (BHH')$, deci $CD \perp AB$ (1) (punctele A, H, H', B sunt coplanare). **1 punct**

Din $AC \perp DH'$ și $AC \perp HH'$ obținem $AC \perp (DHH')$, prin urmare $DH \perp AC$. Cum $DH \perp BC$, rezultă $DH \perp (ABC)$, deci $AB \perp DH$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $AB \perp (BCD)$ **4 puncte**

Dacă M este mijlocul lui $[CD]$, din $\frac{MG'}{MA} = \frac{MG}{MB} = \frac{1}{3}$, obținem $GG' \parallel AB$.

Deoarece $AB \perp (BCD)$ și $GG' \parallel AB$, rezultă $GG' \perp (BCD)$. . **1 punct**

Problema 4. Pentru orice mulțimi numerice nevide A și B , notăm $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

a) Determinați cel mai mare număr natural nenul p cu proprietatea că există $A, B \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A = \text{card}B = p$ și $A + B = \{0, 1, 2, \dots, 2012\}$.

b) Determinați cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea că există $A, B \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A = \text{card}B = n$ și $A + B = \{0, 1, 2, \dots, 2012\}$.

Soluție

a) Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$, cu $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ și $b_1 < b_2 < \dots < b_p$.

Numerele $a_1 + b_1 < a_2 + b_1 < \dots < a_p + b_1 < a_p + b_2 < a_p + b_3 < \dots < a_p + b_p$ sunt elemente ale mulțimii $A + B$, deci $2p - 1 \leq 2013$, adică $p \leq 1007$.

..... **2 puncte**

Considerând mulțimile $A = B = \{0, 1, 2, \dots, 1006\}$, rezultă că $p = 1007$.

..... **1 punct**

b) Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, cu $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ și $b_1 < b_2 < \dots < b_n$.

Întrucât numărul de perechi $(a, b) \in A \times B$ este n^2 , rezultă că mulțimea $A + B$ conține cel mult n^2 elemente. Întrucât $\text{card}(A + B) = 2013$, rezultă $n^2 \geq 2013$, de unde $n \geq 45$ **2 puncte**

Considerând mulțimile $A = \{0, 1, 2, \dots, 44\}$ și $B = \{0, 45, 2 \cdot 45, 3 \cdot 45, \dots, 42 \cdot 45, 43 \cdot 45, 1968\}$, rezultă că $n = 45$ **2 puncte**