



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa finală, Constanța, 3 aprilie 2012**

**CLASA a VII-a**

**Problema 1.** Fie  $P$  un punct în interiorul pătratului  $ABCD$  astfel încât  $PA = 1$ ,  $PB = \sqrt{2}$  și  $PC = \sqrt{3}$ .

- Determinați lungimea segmentului  $[PD]$ .
- Determinați măsura unghiului  $\sphericalangle APB$ .

**Problema 2.** Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A$ . Se consideră punctele  $D \in (AC)$  și  $E \in (BD)$  astfel încât  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ECD \equiv \sphericalangle CED$ . Arătați că  $BE = 2 \cdot AD$ .

**Problema 3.** Se consideră numerele naturale nenule  $(m, n)$  astfel încât numerele

$$\frac{m^2 + 2n}{n^2 - 2m} \quad \text{și} \quad \frac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n}$$

să fie întregi.

- Arătați că  $|m - n| \leq 2$ .
- Găsiți toate perechile  $(m, n)$  cu proprietatea din ipoteză.

**Problema 4.** Numim *redus* al unui număr natural  $A$  cu  $n$  cifre ( $n \geq 2$ ) un număr de  $n - 1$  cifre obținut prin ștergerea uneia din cifrele lui  $A$ . De exemplu, redușii lui 1024 sunt 124, 104 și 120.

Determinați câte numere de șapte cifre **nu** se pot scrie ca suma dintre un număr natural  $A$  și un *redus* al lui  $A$ .

*Timp de lucru 4 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*