Testul 1

Problema 1. Fie $n_1, \cdots, n_k$ numere naturale nenule, fie $d_1 = 1$ şi

$$d_i = \frac{(n_1, \cdots, n_{i-1})}{(n_1, \cdots, n_i)}, \quad i = 2, \cdots, k,$$

unde $(m_1, \cdots, m_\ell)$ este cel mai mare divizor comun al numerelor întregi $m_1, \cdots, m_\ell$. Să se arate că, modulo n_1, sumele

$$\sum_{i=1}^{k} a_i n_i, \quad a_i \in \{1, \cdots, d_i\}, \quad i = 1, \cdots, k,$$

sunt distincte două câte două.

Problema 2. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, astfel încât triunghiurile BCD şi CDA să nu fie echilaterale. Să se arate că, dacă dreapta Simson a vârfului A în raport cu triunghiul BCD este perpendiculară pe dreapta Euler a acestui triunghi, atunci şi dreapta Simson a vârfului B în raport cu triunghiul CDA este perpendiculară pe dreapta Euler a acestui triunghi.

Problema 3. Fie A şi B două mulţimi finite de numere reale şi x un element din mulţimea $A+B$. Să se arate că

$$|A \cap (x - B)| \leq \frac{|A - B|^2}{|A + B|},$$

unde $A+B = \{a+b : a \in A \text{ şi } b \in B\}$, $x-B = \{x-b : b \in B\}$, iar $A-B = \{a-b : a \in A \text{ şi } b \in B\}$.

Problema 4. Să se arate că muchiile unui graf planar finit simplu (fără bucle şi fără muchii multiple) pot fi orientate astfel încât din orice vârf să iasă cel mult trei săgeţi.

Problema 5. Fie p şi q două numere naturale nenule. O mulţime de $p+q$ numere reale $a_1 < a_2 < \cdots < a_{p+q}$ se numeşte *echilibrată*, dacă $a_1, a_2, \cdots, a_p$ formează o progresie aritmetică cu raţia q, iar $a_p, a_{p+1}, \cdots, a_{p+q}$ formează o progresie aritmetică cu raţia p. Să se determine numărul maxim de mulţimi echilibrate care au exact $p+q$ elemente, iar intersecţia oricăror două este nevidă.