



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapă Finală, Constanța, 3 aprilie 2012

### CLASA a XI-a

**Problema 1.** Fie funcțiile  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  astfel încât  $g$  este monotonă și surjectivă și

$$|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|,$$

oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .

a) Arătați că  $f$  este continuă și că există  $x_0 \in [0, 1]$ , cu  $f(x_0) = g(x_0)$ .

b) Arătați că mulțimea punctelor  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $f(x) = g(x)$  este un interval închis.

**Problema 2.** Fie  $n$  și  $k$  două numere naturale astfel încât  $n \geq 2$  și  $1 \leq k \leq n - 1$ . Arătați că dacă matricea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  are exact  $k$  minori nuli de ordin  $n - 1$ , atunci  $\det(A) \neq 0$ .

**Problema 3.** Fie  $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  astfel încât  $AB = BA$  și  $\det(A^2 + AB + B^2) = 0$ . Arătați că

$$\det(A + B) + 3 \det(A - B) = 6 \det(A) + 6 \det(B).$$

**Problema 4.** Determinați funcțiile derivabile  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  pentru care  $f(0) = 0$  și  $f'(x^2) = f(x)$  pentru orice  $x \in [0, \infty)$ .

*Timp de lucru 4 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*