Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a XI-a, SOLUŢII ŞI BAREME

Problema 1. Fie funcţiile $f, g : [0,1] \to [0,1]$ astfel încât g este monotonă şi surjectivă şi

$$|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că f este continuă şi că există $x_0 \in [0,1]$, cu $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Arătaţi că mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = g(x)$ este un interval închis.

Soluţie. a) Cum g este monotonă, are limite laterale în fiecare punct. Arătăm că g este continuă. Altfel, fie x_0 un punct în care $g(x_0 - 0) < g(x_0) \leq g(x_0 + 0)$ sau $g(x_0 - 0) \leq g(x_0) < g(x_0 + 0)$. Atunci intervalul $(g(x_0 - 0), g(x_0 + 0))$ nu este inclus în imaginea funcţiei, contrazicând surjectivitatea. Din inegalitatea din ipoteză rezultă şi continuitatea funcţiei f. . . 2 puncte

Considerăm funcţia h dată de $h(x) = g(x) - f(x)$. Avem $h(0)h(1) = (g(0) - f(0))(g(1) - f(1)) \leq 0$, deoarece g este monotonă şi surjectivă. Proprietatea valorilor intermediare pentru funcţii continue implică existenţa unui punct $x_0 \in [0,1]$ cu $h(x_0) = 0$ adică $f(x_0) = g(x_0)$. . . . . 1 punct

b) Fie $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) = g(x)\}$. Dacă A are un singur element nu mai e nimic de arătat. Dacă A are cel puţin două elemente fie $\alpha = \inf A, \beta = \sup A$. Din continuitatea funcţiilor f şi g deducem că $\alpha, \beta \in A$. . . . 1 punct

Fie $x, y \in [\alpha, \beta]$, $x < y$. Dacă g este crescătoare avem $f(y) - f(x) \leq |f(x) - f(y)| \leq |g(y) - g(x)| = g(y) - g(x)$. Prin urmare $f(y) - g(y) \leq f(x) - g(x)$, deci h este descrescătoare pe $[\alpha, \beta]$. Cum $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ rezultă $h = 0$ pe $[\alpha, \beta]$ adică $A = [\alpha, \beta]$ . . . . 3 puncte

Problema 2. Fie n şi k două numere naturale astfel încât $n \geq 2$ şi $1 \leq k \leq n - 1$. Arătaţi că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are exact k minori nuli de ordin $n - 1$, atunci $\det(A) \neq 0$.

Soluţie. Presupunem că $\det(A) = 0$. Cum A are n^2 minori de ordinul $n - 1$ şi $n^2 > n - 1$, rezultă că A are cel puţin un minor nenul de ordin $n - 1$, deci $\text{rang}(A) = n - 1$ . . . . 2 puncte

Cum $A^*A = O_n$ şi din inegalitatea Sylvester $0 = \text{rang}(AA^*) \geq \text{rang}(A) + \text{rang}(A^*) - n$ rezultă că $\text{rang}(A^*) \leq 1$ . . 1 punct

Din $A^* \neq O_n$ rezultă $\text{rang}(A^*) = 1$ . . . . 1 punct

Deoarece A^* are cel puţin $n^2 - n + 1$ elemente nenule, deducem că are o linie cu toate elementele nenule. Fie aceasta L_1 şi fie L_2 linia din A^* care conţine cel puţin un element nul (o astfel de linie există căci $k \geq 1$). Cum L_1 şi L_2 sunt proporţionale, există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $L_2 = \alpha L_1$ . . . 2 puncte

De aici deducem $\alpha = 0$ deci L_2 are toate elementele nule ceea ce atrage că A are cel puţin n minori de ordin $n - 1$ nuli, absurd . . . . 1 punct

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ şi $\det(A^2 - AB + B^2) = 0$. Arătaţi că

$$\det(A+B) + 3\det(A-B) = 6\det(A) + 6\det(B).$$

Soluţie. Avem $A^2 - AB + B^2 = (A + \omega B)(A + \bar{\omega} B)$, unde ω este o rădăcină cubică nereală a unităţii. .... 1 punct

Considerăm funcţia polinomială de grad 4 definită prin $f(x) = \det(A + xB) = \det A + ax + bx^2 + cx^3 + \det Bx^4$. Condiţia din enunţ se transcrie (matricile având elemente reale) $f(\omega) = f(\bar{\omega}) = 0$ .... 1 punct

Avem

$$f(\omega) = \det A + c + \omega(a + \det B) + \omega^2 b,$$

deci $\det A + c = a + \det B = b$. (1) .... 1 punct

Cum $f(1) = \det A + a + b + c + \det B$ şi $f(-1) = \det A - a + b - c + \det B$, avem $f(1) + f(-1) = 2\det A + 2\det B + 2b$, iar din relaţiile (1) $2b = a + c + \det A + \det B = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)) + \det A + \det B$. .... 3 puncte

Cum $f(1) = \det(A + B)$ şi $f(-1) = \det(A - B)$ deducem relaţia din enunţ. .... 1 punct

Problema 4. Determinaţi funcţiile derivabile $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care $f(0) = 0$ şi $f'(x^2) = f(x)$ pentru orice $x \in [0, \infty)$.

Soluţie. Arătăm că $f = 0$. Din relaţia dată, pentru orice $x \geq 0$ avem $f'(x) = f(\sqrt{x}) \geq 0$, deci f este crescătoare, de unde f' rezultă crescătoare. 2 puncte

Fie $a = \sup\{x \mid f(x) = 0\}$. Dacă $a \in [0, \infty)$ atunci $f(x) = 0$ pe intervalul $[0, a]$ şi $f(x) > 0$ pe (a, ∞) (datorită continuităţii şi monotoniei funcţiei f). 1 punct

Din teorema lui Lagrange aplicată pe intervalul $[a, a+1]$ deducem că $f(a+1) = f'(c)$, cu $c \in (a, a+1)$. .... 1 punct

Atunci $f(a+1) = f(\sqrt{c})$ şi cum f este crescătoare rezultă că este constantă pe intervalul $[\sqrt{c}, a+1]$ deci f' este nulă pe acest interval. Aşadar $f'(a+1) = f'(0) = 0$ şi cum f' este crescătoare rezultă $f' = 0$ pe $[0, a+1]$. De aici $f'(c) = 0 = f(a+1)$, absurd. .... 3 puncte